

Exercices de logique — feuille 2

Exercice 12. Dans le système de Fitch, donner les preuves des raisonnements suivants :

$$\begin{array}{llllll}
 a) \frac{\frac{P}{Q} \Rightarrow R}{R} & b) \frac{P \wedge Q}{Q \vee R} & c) \frac{P \Rightarrow Q}{Q \Leftrightarrow R} & d) \frac{P \Rightarrow Q}{M \Rightarrow P \vee Q} & e) \frac{P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)}{(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow R)} \\
 f) \frac{}{P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)} & g) \frac{}{(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow R))} & h) \frac{P}{\neg \neg P} \\
 i) \frac{}{(\neg P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((\neg P \Rightarrow \neg Q) \Rightarrow P)} & j) \frac{P \Rightarrow Q}{\neg Q \Rightarrow \neg P} & k) \frac{(P \Rightarrow Q) \Rightarrow P}{P} & l) \frac{\neg P \vee Q}{P \Rightarrow Q} \\
 m) \frac{P \Rightarrow Q}{\neg P \vee Q} & n) \frac{}{P \vee \neg P} & o) \frac{\neg P \wedge \neg Q}{\neg(P \vee Q)} & p) \frac{\neg(P \vee Q)}{\neg P \wedge \neg Q}
 \end{array}$$

Exercice 13.

1. Formaliser en logique propositionnelle les phrases suivantes :
 - (a) Si le chat ne peut pas dormir, c'est qu'il y a vraiment beaucoup d'agitation.
 - (b) Les souris ne vont au bal que pour danser.
 - (c) Il n'y a jamais beaucoup d'agitation, sauf pendant les bals.
 - (d) Quand il y a un bal, les souris y vont toujours, sauf s'il pleut.
 - (e) Le chat est toujours là quand il peut dormir ou quand il pleut.
 - (f) Quand le chat n'est pas là, les souris dansent.
2. Utiliser le système de Fitch pour déduire la phrase (f) à partir des phrases (a) à (e).

Exercice 14.

1. Formaliser en logique propositionnelle les phrases suivantes :
 - (a) Quand il prend peur ou quand son maître veut le punir, le chien de Jean de Nivelles s'enfuit.
 - (b) Le gros chien du voisin accourt dès qu'il voit un os.
 - (c) Jean de Nivelles n'appelle son chien que s'il veut lui donner un os ou le punir.
 - (d) Quand le gros chien du voisin accourt, le chien de Jean de Nivelles prend peur.
 - (e) Quand Jean de Nivelles veut donner un os à son chien, le gros chien du voisin voit toujours l'os.
 - (f) Le chien de Jean de Nivelles prend peur si quelqu'un d'autre que son maître l'appelle.
(Indication : *quelqu'un d'autre l'appelle* = *on l'appelle mais Jean de Nivelles ne l'appelle pas*)
 - (g) Le chien de Jean de Nivelles s'enfuit quand on l'appelle.
2. Utiliser le système de Fitch pour déduire la phrase (g) à partir des phrases (a) à (f).

Exercice 15.

1. Donner une forme normale conjonctive de $(P \wedge (Q \Rightarrow R) \Rightarrow S)$
2. Donner une forme normale disjonctive de $(P \vee \neg Q) \Rightarrow R$

Exercice 16.

1. Si FNC est l'ensemble des formules sous forme normale conjonctive et FND l'ensemble des formules sous forme normale disjonctive, est-ce que $FNC \cap FND = \emptyset$?
2. Étant donnée une forme normale disjonctive, le passage à la forme normale conjonctive a-t-il besoin de toutes les règles de transformation ? Donner la FNC de :

$$(A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg D \wedge E) \vee (F \wedge \neg G \wedge H)$$

3. La forme normale conjonctive (ou disjonctive) d'une formule est-elle unique ?